**Практическая работа № 23-24**

«Системы массового обслуживания»

**Цель работы:** Освоить основные типы задач систем массового обслуживания..

**Образовательные результаты, заявленные во ФГОС третьего поколения:**

Студент должен

уметь:

- подбирать аналитические методы исследования математических моделей;

- использовать численные методы исследования математических моделей;

знать:

- методы исследования математических моделей разных типов.

**Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы**

Потоки событий

Под потоком событий понимается последовательность однородных событий, следующих одно за другим в какие-то случайные моменты времени (например, поток вызовов на телефонной станции, поток отказов компьютера, поток покупателей и т.п.).

Поток характеризуется интенсивностьюimage37— частотой появления событий, поступающих в СМО в единицу времени.

Поток событий называется регулярным, если события следуют одно за другим через определенные равные промежутки времени. Например, поток изделий на конвейере

сборочного цеха (с постоянной скоростью движения) является регулярным.

Поток событий называется стационарным, если его вероятностные характеристики не зависят от времени. В частности, интенсивность стационарного потока есть величина постоянная:image38Например, поток автомобилей

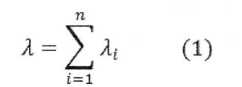
на городском проспекте не является стационарным в течение суток, но этот поток можно считать стационарным в определенное время суток, скажем, в часы пик. В этом случае фактическое число проходящих автомобилей в единицу времени (например, каждую минуту) может заметно различаться, но среднее их число постоянно и не будет зависеть от времени.

Поток событий называется потоком без последствия, если для любых двух непересекающихся участков времениimage39 иimage40число событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий, попадающих на другие. Например, поток пассажиров, входящих в метро практически не имеет последствия. А, скажем, поток покупателей, отходящих с покупками от прилавка, уже имеет последствие (хотя бы потому, что интервал времени между отдельными покупателями не может быть меньше, чем минимальное время обслуживания каждого из них).

Поток событий называется ординарным, если вероятность попадания на малый (элементарный) участок времениimage41двух и более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события. Другими словами, поток ординарен, если события появляются в нем поодиночке, а не группами. Например, поток поездов, подходящих к станции, ординарен, а поток вагонов не ординарен.

Поток событий называется простейшим (или стационарным пуассоновским), если он одновременно стационарен, ординарен и не имеет последствия. Название «простейший» объясняется тем, что СМО с простейшими потоками имеет наиболее простое математическое описание. Регулярный поток не является простейшим, так как обладает последствием: моменты появления событий в таком потоке жестко зафиксированы.

Утверждение. При наложении (суперпозиции) достаточно большого числа п независимых, стационарных и ординарных потоков (сравнимых между собой по интенсивностямimage42получается поток, близкий к простейшему с интенсивностьюimage43равный сумме интенсивностей входящих потоков, т.е.



Пусть случайная величина X выражает число событий (точек), попадающих на произвольный промежуток времени г (рассматривается простейший поток событий). Тогда,

вероятность того, что за время г произойдет ровно т событий определяется по закону Пуассона и равна

image45

гдеimage46является математическим ожиданием (средним

значением) случайной величины X.

В частности, вероятность того, что за времяimage47не произойдет ни одного событияimage48равна

image49

Пример 4.

К компьютеру поступают задания с интенсивностью image50заданий в секунду (поток заданий простейший). Найти вероятность того, что за две секунды: а) не поступит ни одного задания; б) поступит ровно одно задание; в) поступит хотя бы одно задание.

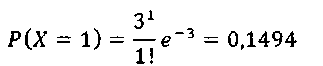
Решение. Случайная величина X - число заданий за две секунды - распределена по закону Пуассона с параметром

image51

а) Вероятность того, что вызовов не будетimage52

image53

б) Вероятность поступления одного заданияimage54



в) Вероятность поступления хотя бы одного задания

image56

image57

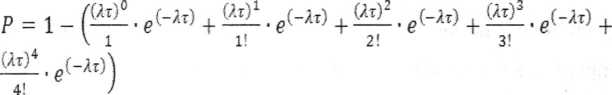
Пример 5.

В ателье поступает в среднем 3 заявки в день. Считая поток простейшим, найти вероятность того, что в течение двух ближайших дней число заявок будет не менее 5.

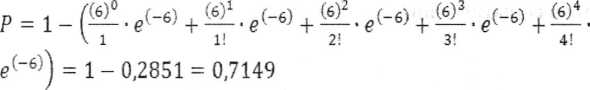
Решение. По условию задачи интенсивность потока image58входной поток пуассоновский.

Случайная величина X - число заявок за два ближайших дня - распределена по закону Пуассона с параметромimage59

При решении удобно ввести противоположное событие, состоящее в том, что за время т поступит меньше 5 заявок. Следовательно, по формуле Пуассона



Получим



Предельные вероятности состояний

Рассмотрим математическое описание марковского случайного процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем по данным примера 1.

Будем полагать, что все перхеоды системы из состояния Sj в состояние Sj происходят под воздействием простейших потоков событий с интенсивностямиimage62

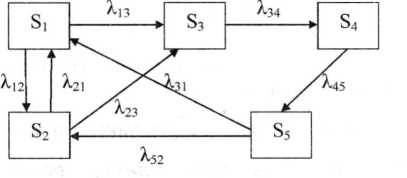
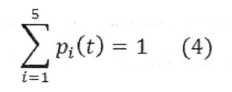


Рис. 4. Граф состояний работы компьютера с интенсивностями  
переходов из состояния в состояние.

Вероятностьюimage64состояния называется вероятность image65того, что в моментimage66система будет находиться в состоянииimage67Очевидно, что для любого момента времени 1 сумма всех вероятностейimage68равна единице:



Особый интерес представляют вероятности системы image70в предельном стационарном режиме, т.е. приimage71 которые называются предельными (финальными) вероятностями состояний.

В теории случайных процессов доказывается, что если число состояний системы конечно и из каждого из них можно (за конечное число шагов) перейти в любое другое состояние, то предельные вероятности существуют.

Для определения предельных вероятностей необходимо решить систему линейных уравнений:

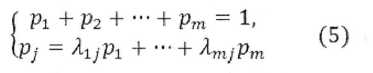


image73

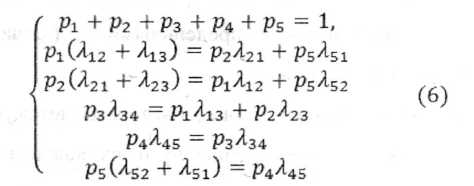
Данную систему уравнений для определения предельных вероятностей можно преобразовать к другому виду, для составления которой можно пользоваться следующим правилом:

слева в уравнениях стоит предельная вероятность i-го состоянияimage74умноженная на суммарную

интенсивность всех потоков, ведущих из данного i-го состояния, а справа — сумма произведений интенсивностей потоков, входящих в i-e состояние, на вероятности тех состояний, из которых эти потоки исходят.

Для нашего примера система уравнений будет иметь

вид:

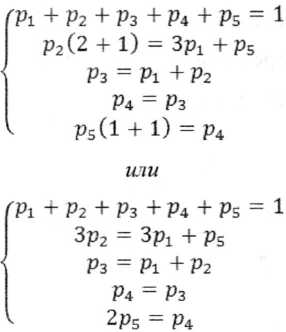


Предельная вероятность состоянияimage76имеет четкий смысл: она показывает среднее относительное время

пребывания системы в этом состоянии.

Пример 6.

Найти предельные вероятности для системы S из примера 1, граф состояний которой приведен на рисунке 4, приimage77

Решение. Система алгебраических уравнений, описывающих стационарный режим для данной системы, имеет вид (6). После вычеркивания второго уравнения системы и замены известных переменных, получим:

Решая данную систему, получаем:image79

image80 То есть, в

предельном стационарном режиме система S в среднем 16,6% времени будет находиться в состоянииimage8111,9% времени - в состоянииimage82- в состоянииimage83 - в

состоянииimage84и 14.3% - в состоянииimage85

Процессы гибели и размножения

В теории массового обслуживания широко распространен специальный класс случайных процессов - так называемые процессы гибели и размножения. Название это связано с рядом биологических задач, где этот процесс служит математической моделью изменения численности биологических популяций.

Граф состояний процесса гибели и размножения представлен на рисунке 5.

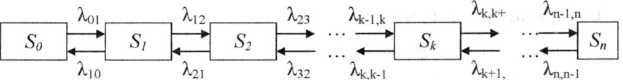


Рис. 5. Граф состояний процесса гибели и размножения

Рассмотрим упорядоченное множество состояний системы image90Переходы могут

осуществляться из любого состояния только в состояния с соседними номерами, т.е. из состоянияimage91возможны переходы либо в состояниеimage92либо в состояниеimage93 Предположим, что все потоки событий, переводящие систему по стрелкам графа, простейшие с

соответствующими интенсивностямиimage94илиimage95

По графу, представленному на рисунке 5 , составим и решим алгебраические уравнения для предельных вероятностей состояний (их существование вытекает из

возможности перехода из каждого состояния в каждое другое и конечности числа состояний).

В соответствии с правилом составления таких уравнений получим:

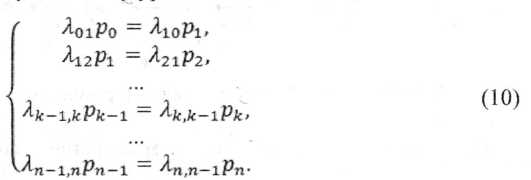
для состоянияimage96

для состояния image97

которое с учетом (7) приводится к виду:

image98(9)

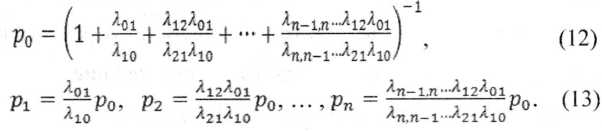
Аналогично, записывая уравнения для предельных вероятностей других состояний, можно получить следующую систему уравнений:



к которой добавляется нормировочное условие:

image100

Решая систему (11) и (12), можно получить:



Легко заметить, что в формулах (13) дляimage102 коэффициенты при image103- это слагаемые, стоящие послеединицы в формуле (12). Числители этих коэффициентов представляют собой произведения интенсивностей, стоящих у стрелок, ведущих слева направо от S0 до данного состояния image104а знаменатели - произведения всех интенсивностей, стоящих у стрелок, ведущих справа налево из состоянияimage105

Пример 7.

Три одинаковых узла образуют техническое устройство. Каждый из узлов может оказаться в состоянии неисправленное™. Отказавший узел сразу приступает к восстановлению.

Состояния системы:

image106- три узла в рабочем состоянии;

image107- один узел неисправен (состояние восстановления), два в рабочем состоянии;

image108- два узла восстанавливаются, два в рабочем состоянии;

image109- три узла в неисправленном состоянии.

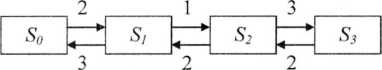
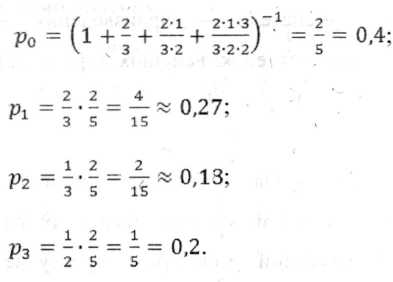


Рис. 6. Граф состояний для системы «техническое устройство» Граф иллюстрирует, что процесс, который существует в системе, можно назвать процессом размножения и гибели.

Граф состояний представлен на рисунке 6.

Определим предельные вероятности состояний, характерные для процесса размножения и гибели.

Используя формулы (12)-(13), имеем:



Таким образом, в установившемся, стационарном режиме в среднем 40% времени система будет находиться в состоянииimage11227% - в состоянииimage11313% - в состоянииimage114 20% - в состоянииimage115

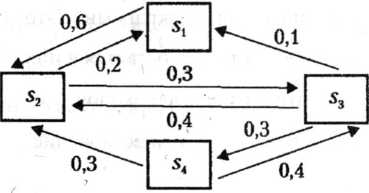
**Задания для самостоятельной работы**

**1**. Пусть А1 А2, А3, А4 - точки числовой оси с целочисленными координатами х=1, х=2, х=3, х=4.Представим себе частицу, которая движется по этим точкам следующим образом: если в какой-то момент времени t=n (n=0,1,2,...) частица находится в одной из внутренних точек А2 или А3, то в следующий момент t=n+l она переходит в соседнюю справа точку с вероятностью р (0<р<1) или в соседнюю слева точку - с вероятностью q=l-p.Точки А1 и А4 являются поглощающими экранами. Это обозначает, что частица попадая в эти точки, остается в них навсегда.

* Найдите матрицу переходов.
* Проверьте существование предельных вероятностей.
* Если существуют предельные вероятности,то найдите их.

1. Среднее число заказов такси, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту, равно 5. Найдите вероятность того, что за четыре минуты поступит: а) 8 вызовов; б) хотя бы один вызов; в) ни одного вызова. (Поток заявок простейший).
2. Рассмотрим состояния банка image333 характеризующиеся соответственно процентными ставками 3%, 4%, 5%, 6%, которые устанавливаются в начале каждого месяца и фиксированы на всем его протяжении. Наблюдение за работой банка в предшествующий период показало, что переходные вероятности состояний в течение квартала изменяются пренебрежимо мало и, следовательно, их можно считать постоянными.

Определите вероятности состояния банка в конце квартала, если в конце предшествующего квартала процентная ставка составляла 4%, а размеченный граф состояния банка имеет следующий вид:



1. Рассматривается n-канальная система массового обслуживания (СМО) с ожиданием. Поток заявок, поступающих в СМО, простейший с интенсивностью image335 [1/час]. Среднее время обслуживания заявки равно to6 [мин]. Время обслуживания распределено по показательному закону. Определите:

а) существует ли стационарный режим работы СМО;

б) среднее число заявок, находящихся в СМО;

в) среднее время пребывания заявки в СМО;

г) вероятность того, что все каналы заняты;

д) среднее время простоя одного (произвольно взятого)

канала,

еслиimage336

1. Рассматривается n-канальная система массового обслуживания (СМО) без ограничения на длину очереди, но с ограничением на время ожидания. Заявка ожидает обслуживания в среднем image337 [мин], а затем покидает СМО. Поток заявок, поступающих в СМО, простейший с интенсивностью image338[1/час], среднее время обслуживания заявки равно image339 [мин].

Определите:

а) абсолютную пропускную способность СМО;

б) среднее число заявок в очереди;

в) вероятность того, что в очереди будут находиться не

более 2-х заявок,

если image340

6. Рассматривается n-канальная система массового обслуживания (СМО) с отказами. Поток заявок, поступающих в СМО, простейший с интенсивностью image341 [1/час]. Среднее время обслуживания заявки равно to6 [мин]. Время обслуживания распределено по показательному закону. Определить:

а) число каналов, при котором вероятность того, что заявка получит отказ, не больше а;

б) абсолютную пропускную способность СМО;

в) среднее число каналов, занятых обслуживанием заявок;

г) среднее время пребывания заявки в СМО;

д) среднее время простоя одного (произвольно взятого) канала.

image342

7. Рассматривается n-канальная система массового обслуживания (СМО) с ожиданием. Поток заявок, поступающих в СМО, простейший с интенсивностью image343 []/час]. Среднее время обслуживания заявки равно to6 [мин]. Время обслуживания распределено по показательному закону. Определить:

а)существует ли стационарный режим работы СМО;

б)среднее число заявок, находящихся в СМО;

в) среднее время пребывания заявки в СМО;

г) вероятность того, что все каналы заняты;

д) среднее время простоя одного (произвольно взятого) канала,

если image344

8. Специализированный пост диагностики

представляет собой одноканальную СМО. Число стоянок для автомобилей, ожидающих проведения диагностики, ограниченно и равно 3. Если все стоянки заняты, то очередной автомобиль, пришедший на диагностику, в очередь на обслуживание не становится. Поток прибывающих автомобилей - пуассоновский и имеет интенсивность 0.85 автомобиля в час. Время диагностики распределено по показательному закону и в среднем составляет 1.05 час. Провести сравнительный анализ работы СМО при S=3 и S=4.

1. Рассматривается служба заказа такси по телефону. Заказы принимают несколько сотрудников. Если они все заняты, клиент получает отказ и обращается в конкурирующую организацию. Среднее время оформления одного заказа составляет 2.5 минуты, среднее число обращений в службу заказов 60 ч-1. Провести сравнительный анализ СМО, когда заказы принимают 3 или 4 сотрудника.

**Контрольные вопросы**

1 Какие системы называются системами массового обслуживания?   
2 Как классифицируются системы массового обслуживания по признаку   
их организации?   
3 Какие системы массового обслуживания называются системами с отказами, а какие – с ожиданием?   
4 Что происходит с заявкой, поступившей в момент времени, когда все   
каналы обслуживания заняты?   
5 Что рассматривают в качестве меры эффективности экономической   
системы массового обслуживания?   
6 Какие используются показатели эффективности системы массового обслуживания?   
7 Что служит исходными данными для расчетов показателей эффективности систем массового обслуживания?   
8 Какие исходные данные необходимы для моделирования систем массового обслуживания?   
9 Через какие результаты моделирования системы массового обслуживания выражают все показатели ее эффективности?   
10 Что включают основные параметры для моделирования систем массового обслуживания?   
11 Чем характеризуются потоки заявок на обслуживание?   
12 Чем характеризуются механизмы обслуживания?   
13 Что описывает граф состояний системы массового обслуживания